

УДК 514.7

doi:10.21685/2072-3040-2021-1-5

Базовые автоморфизмы картановых слоений, накрытых расслоениями

К. И. Шеина

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород, Россия

ksheina@hse.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Работа посвящена исследованию групп базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ картановых слоений (M, F) , накрытых расслоениями, и нахождению достаточных условий для существования в $A_B(M, F)$ структуры конечномерной группы Ли. Класс картановых слоений, накрытых расслоениями, достаточно широк, он содержит, в частности, картановы (X, G) -слоения со связностью Эресмана, картановы слоения с нулевой трансверсальной кривизной, а также картановы слоения с интегрируемой связностью Эресмана. *Материалы и методы.* В работе использованы методы слоеных расслоений и накрывающих отображений. *Результаты.* Найдены достаточные условия для того, чтобы группа базовых автоморфизмов картанова слоения, накрытого расслоением, допускала структуру конечномерной группы Ли. Получены оценки размерности данной группы. Более того, для картановых слоений с интегрируемой связностью Эресмана указан способ вычисления групп базовых автоморфизмов. *Выводы.* Структура групп базовых автоморфизмов картановых слоений, накрытых расслоениями, определяется структурой глобальной группы голономии таких слоений.

Ключевые слова: картаново слоение, базовые автоморфизмы, связность Эресмана

Благодарности: автор выражает благодарность Н. И. Жуковой за полезные обсуждения и замечания.

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2009-1931.

Для цитирования: Шеина К. И. Базовые автоморфизмы картановых слоений, накрытых расслоениями // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 49–65. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-5

Basic automorphisms of cartan foliations covered by fibrations

K.I. Sheina

National Research University "Higher School of Economics",
Nizhny Novgorod, Russia

ksheina@hse.ru

Abstract. *Background.* This work is devoted to the study of basic automorphisms $A_B(M, F)$ groups of Cartan foliations (M, F) covered by fibrations, and to finding sufficient conditions for the existence of a finite-dimensional Lie group structure in $A_B(M, F)$. The class of Cartan foliations covered by fibrations is quite wide; it contains, in particular,

Cartan (X, G) -foliations with Ehresmann connections, Cartan foliations with a vanishing transversal curvature, and Cartan foliations with integrable Ehresmann connection. *Methods.* We used the methods of foliated bundles and covering maps in this research. *Results.* We get sufficient conditions for the basic automorphism group of Cartan foliation covered by fibrations to admit a finite-dimensional Lie group structure in the category of Cartan foliations. Estimates of this group dimension are obtained. Moreover, for Cartan foliations with integrable Ehresmann connection, a method for computing groups of basic automorphisms is specified. *Conclusions.* The structure of basic automorphisms groups of Cartan foliations covered by fibration is determined by the structure of the global holonomy group of such foliations.

Keywords: cartan foliation, basic automorphism, Ehresmann connection

Acknowledgments: the author extends gratitude to N.I. Zhukova for the useful discussion and remarks. The work was financed by the Laboratory of Dynamic Systems and Applications of HSE University, a grant of the Ministry of Science and Higher Education, agreement No. 075-15-2009-1931

For citation: Sheina K.I. Basic automorphisms of cartan foliations covered by fibrations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2021;1:49–65. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-5

Введение

Одним из основных объектов, ассоциированных с геометрической структурой на гладком многообразии, является его группа автоморфизмов. Во введении к монографии Ш. Кобаяси [1] подчеркнуто, что существование структуры конечномерной группы Ли в группе автоморфизмов многообразия с геометрической структурой является одной из центральных проблем дифференциальной геометрии.

Как известно, решенная 5-я проблема Гильберта посвящена нахождению условий, при которых топологическая группа допускает структуру группы Ли [2]. Из многочисленных работ Э. Картана, Р. Майера, Н. Стинрода, К. Номидзу, Ш. Кабаяси, Ш. Эресмана и других авторов известно, что группы автоморфизмов многих геометрических структур являются группами Ли преобразований (см. обзор [3]).

Пространства, которые сейчас называются картановыми геометриями, были введены Э. Картаном в 1920-х гг. Теория картановых геометрий изложена в монографиях А. Чапа, Я. Словака [4], Р. В. Шарпе [5], М. Крампина и Д. Саундерса [6]. В настоящее время картановы геометрии и картановы слоения исследуются многими математиками и находят применение в различных физических теориях (см. например, [7–10]).

Пусть (M, F) – гладкое слоение. Напомним, что голономно инвариантная геометрическая структура на многообразии M называется трансверсальной к слоению (M, F) . Другое, эквивалентное определение трансверсальной геометрической структуры, в качестве которой выступает картанова геометрия, дано в разд. 1. В теории слоений с трансверсальными картановыми геометриями в качестве морфизмов рассматриваются локальные диффеоморфизмы, переводящие слои в слои и сохраняющие трансверсальную геометрию (см. раздел 1). Категория картановых слоений обозначается через $\mathcal{CS}$.

Данная работа посвящена исследованию групп автоморфизмов картановых слоений, т.е. слоений, допускающих в качестве трансверсальной

структуры картанову геометрию. Изучение картановых слоений мотивировано тем, что такие широкие классы слоений, как параболические, конформные, проективные, псевдоримановы, лоренцевы, вейлевые, трансверсально однородные слоения и слоения с трансверсальной линейной связностью, – принадлежат к классу картановых слоений. Поэтому исследование картановых слоений позволяет с единой точки зрения изучать общие свойства указанных слоений, в то время как многие авторы изучают их по отдельности.

Пусть $A(M, F)$ – полная группа автоморфизмов картанова слоения (M, F) в категории $C\mathfrak{S}$. Группа $A_L(M, F) := \{f \in A(M, F) \mid f(L_\alpha) = L_\alpha \forall L_\alpha \in F\}$ является нормальной подгруппой $A(M, F)$ и называется *группой слоевых автоморфизмов* слоения (M, F) . Факторгруппа $A(M, F)/A_L(M, F)$ называется *группой базовых автоморфизмов* и обозначается через $A_B(M, F)$. Подчеркнем, что группа базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ картанова слоения (M, F) является инвариантом в категории картановых слоений CF .

Мы исследуем группы базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ картановых слоений (M, F) , накрытых расслоением, и находим достаточные условия для существования в группе $A_B(M, F)$ структуры конечномерной группы Ли. Дж. Лесли, впервые решил подобную задачу для гладких слоений на компактных многообразиях и рассмотрел приложение к слоениям с трансверсальной G -структурой. Для слоений с полными трансверсально проектируемыми аффинными связностями данная проблема решалась И. В. Белько [11]. Группы базовых автоморфизмов полных слоений с эффективными трансверсальными жесткими геометриями исследованы Н. И. Жуковой [12], ею введен алгебраический инвариант, названный структурной алгеброй Ли слоения, и доказано, что равенство данного инварианта нулю является достаточным условием для того, чтобы группа базовых автоморфизмов данного класса слоений допускала структуру конечномерной группы Ли. В статье [13] исследовалось существование структуры группы Ли в группах базовых автоморфизмов картановых слоений, моделируемых на неэффективных картановых геометриях.

1. Основные результаты

Среди картановых слоений выделяются слоения, накрытые расслоениями.

Определение 1. Слоение (M, F) называется *накрытым расслоением*, если слоение $(\tilde{M}, \tilde{F})$, индуцированное на пространстве универсального накрывающего отображения $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$, образовано слоями локально тривиального расслоения $\tilde{r}: \tilde{M} \rightarrow B$.

Следующая теорема описывает глобальную структуру картанова слоения, накрытого расслоением.

Теорема 1. Пусть (M, F) – картаново слоение, моделируемое на картановой геометрии ξ , накрытое расслоением $\tilde{r}: \tilde{M} \rightarrow B$, где $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$ – универсальное накрытие. Тогда:

1) существует регулярное накрывающее отображение $k: \hat{M} \rightarrow M$ такое, что индуцированное слоение $\hat{F}$ образовано слоями локально тривиального расслоения $r: \hat{M} \rightarrow B$ над односвязным многообразием B , причем ξ индуцирует на B картанову геометрию η , локально изоморфную ξ ;

2) определен эпиморфизм $\chi: \pi_1(M, x) \rightarrow \Psi$, $x \in M$, фундаментальной группы $\pi_1(M, x)$ на подгруппу Ψ группы Ли автоморфизмов $Aut(B, \eta)$ картанова многообразия (B, η) ;

3) группа накрывающих преобразований накрытия $k: \hat{M} \rightarrow M$ изоморфна группе Ψ .

Определение 2. Группа $\Psi = \Psi(M, F)$, удовлетворяющая теореме 1, называется *глобальной группой голономии* картанова слоения (M, F) , накрытого расслоением.

Мы приводим подробное доказательство следующей теоремы, приведенной без доказательства в статье [13, Proposition 8]. Эта теорема устанавливает связь между группой базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ картанова слоения (M, F) , накрытого расслоением, и его глобальной группой голономии Ψ .

Теорема 2. Пусть (M, F) – картаново слоение, накрытое расслоением $r: \hat{M} \rightarrow B$, где B – односвязное картаново многообразие. Предположим, что глобальная группа голономии Ψ является дискретной подгруппой группы Ли $Aut(B, \eta)$. Пусть $N(\Psi)$ – нормализатор Ψ в группе $Aut(B, \eta)$. Тогда группа базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ является группой Ли изоморфной открыто-замкнутой подгруппе Ли фактор-группы $N(\Psi)/\Psi$ и $\dim(A_B(M, F)) = \dim(N(\Psi)/\Psi)$. Структура группы Ли в группе $A_B(M, F)$ единственна.

Следующая теорема указывает способ вычисления групп базовых автоморфизмов для картановых слоений с интегрируемой связностью Эресмана.

Теорема 3. Пусть (M, F) – картаново слоение с интегрируемой связностью Эресмана Q . Тогда:

1) существует регулярное накрытие $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$ такое, что $\tilde{M} = L_0 \times B$, где L_0 – многообразие, диффеоморфное любому слою с тривиальной группой голономии, а B – односвязное многообразие, причем индуцированное слоение $\tilde{F} = \tilde{k} * F$ образовано слоями канонической проекции $r: L_0 \times B \rightarrow B$ на второй сомножитель, а на B индуцирована картанова геометрия η , относительно которой $\tilde{k}$ – морфизм картановых слоений (M, F) и $(\tilde{M}, \tilde{F})$;

2) слоение (M, F) является $(Aut(B, \eta), B)$ -слоением;

3) если, кроме того, глобальная группа голономии Ψ является дискретной подгруппой группы Ли $Aut(B, \eta)$ и нормализатор $N(\Psi)$ равен централизатору $Z(\Psi)$ группы Ψ в $Aut(B, \eta)$, то имеет место равенство $A_B(M, F) \cong N(\Psi)/\Psi$.

Используя теорему 3, мы строим пример вычисления группы базовых автоморфизмов некоторого конформного слоения произвольной коразмерности q , где $q \geq 3$ на $(q+1)$ -мерном многообразии. Другие примеры построены в [13].

2. Категория картановых слоений

Категория картановых геометрий. Пусть G и H – группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно, причем H – замкнутая подгруппа в G . Главное H -расслоение $P(N, H)$ над гладким многообразием N с проекцией $p: P \rightarrow N$ и $\mathfrak{g}$ -значной 1-формой $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ называется *картановой геометрией* на N типа (G, H) , если выполнены следующие условия:

с₁) отображение $\omega_u: T_u P \rightarrow \mathfrak{g} \quad \forall u \in P$ – изоморфизм векторных пространств;

с₂) $\omega(A^*) = A$ для любого $A \in \mathfrak{h}$, где A^* – фундаментальное векторное поле;

с₃) форма ω является H -эквивариантной, т.е. $R_h^* \omega = Ad_G(h^{-1})\omega$ для каждого $h \in H$, где $Ad_G: H \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ – присоединенное представление подгруппы Ли $H \subset G$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. При этом $\mathfrak{g}$ -значная форма ω называется *картановой связностью*. Будем обозначать картанову геометрию типа (G, H) через $\xi = (P(N, H), \omega)$. Пара (N, ξ) – картаново многообразие.

Максимальная нормальная подгруппа K группы G , содержащаяся в H , называется ядром пары (G, H) . Обозначим алгебру Ли группы K через $\mathfrak{k}$. Картанова геометрия $\xi = (P(N, H), \omega)$ типа (G, H) , моделируемая на паре групп Ли (G, H) , называется *эффективной*, если ядро K пары (G, H) тривиально. Далее предполагаем, что все рассматриваемые картановы геометрии являются эффективными.

Пусть $\xi = (P(N, H), \omega)$ и $\xi' = (P'(N', H), \omega')$ – две картановых геометрии со структурной группой H . Морфизмом из ξ в ξ' называют гладкое отображение $\Gamma: P \rightarrow P'$, для которого $\Gamma^* \omega' = \omega$ и $R_a \circ \Gamma = \Gamma \circ R_a$, $a \in H$. Категорию картановых геометрий обозначим через Car . Если $\Gamma \in Mor(\xi, \xi')$, тогда проекция $\gamma: N \rightarrow N'$ определена равенством $p' \circ \Gamma = \gamma \circ p$, где $p: P \rightarrow N$ и $p': P' \rightarrow N'$ – проекции, соответствующие H -расслоениям.

Проекция γ называется *автоморфизмом картановых многообразий* (N, ξ) и (N', ξ') . Обозначим через $Aut(N, \xi)$ группу всех автоморфизмов картанова многообразия (N, ξ) , а через $A(\xi)$ – группу всех автоморфизмов картановой геометрии ξ . Пусть $A(P, \omega) := \{\Gamma \in Diff(P) | \Gamma^* \omega = \omega\}$ – группа автоморфизмов параллелизуемого многообразия (P, ω) , которая, как известно, является группой Ли, причем $\dim(A(P, \omega)) \leq \dim P$. Заметим, что $A(\xi) = \{\Gamma \in A(P, \omega) | R_a \circ \Gamma = \Gamma \circ R_a\}$ – замкнутая подгруппа группы Ли $A(P, \omega)$. Следовательно, $A(\xi)$ является группой Ли, причем определено отображение $\sigma: A(\xi) \rightarrow Aut(N, \xi): \Gamma \mapsto \gamma$, где γ – проекция автоморфизма Γ

на N , которое в силу эффективности картановой геометрии является изоморфизмом групп Ли.

Картановы слоения. Пусть N – гладкое q -мерное, возможно не связное, многообразие; M – гладкое n -мерное многообразие, где $0 < q < n$. Предположим, что многообразие N наделено картановой геометрией $\xi = (P(N, H), \omega)$. Пусть $p: P \rightarrow N$ – проекция H -расслоения. На каждом открытом подмножестве $V \subset N$ индуцирована картанова структура $\xi_V = (P_V(V, H), \omega_V)$ типа (G, H) такая, что $P_V := p^{-1}(V)$ и $\omega_V := \omega|_{P_V}$.

Напомним, что (N, ξ) -коциклом на M называется семейство $\varsigma = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\{U_i | i \in J\}$ – открытое покрытие многообразия M открытыми связными подмножествами U_i из M , а $f_i: U_i \rightarrow N$ – субмерсии со связными слоями;

2) если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $i, j \in J$, то существует изоморфизм $\Gamma_{ij}: \xi_{f_j(U_i \cap U_j)} \rightarrow \xi_{f_i(U_i \cap U_j)}$ картановых геометрий, индуцированных на открытых подмножествах $f_j(U_i \cap U_j)$ и $f_i(U_i \cap U_j)$ такой, что проекция γ_{ij} изоморфизма Γ_{ij} удовлетворяет равенству $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $i, j \in J$;

3) если $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, $i, j, k \in J$, то $\gamma_{ij} \circ \gamma_{jk} = \gamma_{ik}$ для любого $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ и $\gamma_{ii} = id_{U_i}$.

Два (N, ξ) -коцикла называются эквивалентными, если существует (N, ξ) -коцикл, содержащий оба этих коцикла.

Пусть $\left[\left\{ U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J} \right\} \right]$ – класс эквивалентности (N, ξ) -коцикла на многообразии M , содержащий коцикл ς . Класс эквивалентности (N, ξ) -коциклов задает картаново слоение на многообразии M , следующим образом. Пусть семейство $\Sigma = \{f_i^{-1}(v) | v \in V_i, i \in J\}$ образует базу некоторой топологии τ в M . Компоненты линейной связности топологического пространства (M, τ) образуют разбиение $F := \{L_\alpha | \alpha \in J\}$ многообразия M . Пара (M, F) называется картановым слоением коразмерности q моделируемым на картановой геометрии $\xi = (P(N, H), \omega)$, которая называется трансверсальной для слоения (M, F) . Подмножество $L_\alpha | \alpha \in J$ называются слоями слоения (M, F) . При этом говорят, что (M, F) задано (N, ξ) -коциклом ς .

Морфизмы картановых слоений. Пусть (M, F) и (M', F') – картановы слоения, определенные (N, ξ) -коциклом $\varsigma = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}$ и (N', ξ') -коциклом $\varsigma' = \{U'_i, f'_i, \{\gamma'_{ij}\}\}$ соответственно. Все объекты, относящиеся к ς' , отмечены штрихом.

Пусть $f: M \rightarrow M'$ – гладкое отображение, которое является изоморфизмом в категории $\mathfrak{Fol}$. Следовательно, для любых $x \in M$ и $y := f(x)$ существуют окрестности $U_k \ni x$ и $U'_s \ni y$ из ζ и ζ' соответственно и диффеоморфизм $\varphi: V_k \rightarrow V'_s$, где $V_k := f_k(U_k)$ и $V'_s := f'_s(U'_s)$ удовлетворяют соотношениям $f(U_k) = U'_s$ и $\varphi \circ f_k = f'_s \circ f|_{U_k}$. Далее мы будем использовать следующие обозначения: $P_k := P|_{V_k}$, $P'_s := P'|_{V'_s}$ и $p_k := p|_{P_k}$, $p'_s := p|_{P'_s}$.

Говорят, что f сохраняет трансверсальную картанову геометрию, если каждый такой диффеоморфизм $\varphi: V_k \rightarrow V'_s$ является изоморфизмом индуцированных картановых геометрий (V_k, ξ_{V_k}) и $(V'_s, \xi'_{V'_s})$, т.е. если существует изоморфизм $\Phi: P_k \rightarrow P'_s$ в категории Car , удовлетворяющий коммутативной диаграмме (рис. 1).

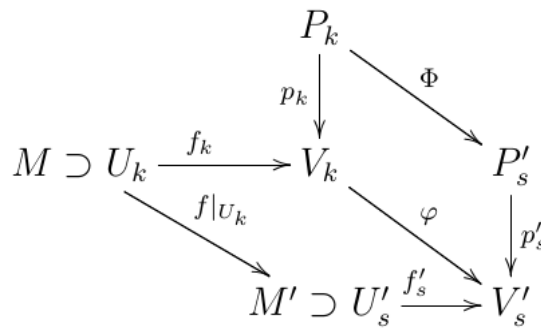


Рис. 1

Подчеркнем, что в силу эффективности трансверсальной картановой геометрии с данной проекцией φ существует единственный изоморфизм $\Phi: P_k \rightarrow P'_s$ в категории Car . Данное определение Φ корректно, т.е. не зависит от выбора окрестностей U_k и U'_s из ζ и ζ' .

Определение 3. Под морфизмом двух картановых слоений (M, F) и (M', F') понимается локальный диффеоморфизм $f: M \rightarrow M'$, отображающий слои в слои и сохраняющий трансверсальную картанову структуру. Категория $C\mathfrak{F}$, объектами в которой являются картановы слоения, а морфизмами – морфизмы картановых слоений, называется *категорией картановых слоений*.

3. Связность Эресмана для слоений

Слоения со связностью Эресмана. Р. А. Блюменталь и Дж. Дж. Хебда [14] ввели понятие связности Эресмана для слоения (M, F) как естественное обобщение связности Эресмана для субмерсий. Пусть (M, F) – слоение коразмерности q ; Q – гладкое q -мерное распределение на M , трансверсальное к слоению F . Кусочно-гладкие интегральные кривые распределения Q называются горизонтальными, а кусочно-гладкие кривые в слое называются вертикальными. Кусочно-гладкое отображение H квадрата

$I_1 \times I_2$ в M называется *вертикально-горизонтальной гомотопией*, если кривая $H|_{\{s\} \times I_2}$ является *вертикальной* для любого $s \in I_1$ и кривая $H|_{I_1 \times \{t\}}$ является *горизонтальной* для любого $t \in I_2$. В этом случае пара путей $(H|_{I_1 \times \{0\}}; H|_{\{0\} \times I_2})$ называется базой H .

Известно, что существует не более одной вертикально-горизонтальной гомотопии с данной базой. Распределение Q называется *связностью Эресмана* для слоения (M, F) , если для любой пары путей (σ, h) в M с общей начальной точкой $\sigma(0) = h(0)$, где σ – горизонтальная кривая, а h – вертикальная кривая, существует вертикально-горизонтальная гомотопия H с базой (σ, h) .

Простое слоение со связностью Эресмана. Пусть $f: M \rightarrow N$ – субмерсия со связными слоями. Напомним, что слоение $F = \{p^{-1}(z), z \in N\}$, образованное слоями субмерсии, называется *простым слоением*. Пусть (M, F) – произвольное гладкое слоение связностью Эресмана. Если существует его накрытие $\hat{k}: \hat{M} \rightarrow M$ такое, что поднятое слоение $(\hat{M}, \hat{F})$ является простым, то слоение (M, F) накрыто расслоением.

4. Классы слоений, накрытых расслоениями

(X, G) -слоения со связностью Эресмана. Пусть X – гладкое связное многообразие, G – группа Ли диффеоморфизмов многообразия X . Напомним, что действие группы G на многообразии X называется *квазианалитическим*, если для любого открытого подмножества $U \subset X$ и элемента $g \in G$ равенство $g|_U = id|_U$ влечет $g = e$, где e – тождественное преобразование в X .

Предположим, что группа диффеоморфизмов G многообразия X действует на N квазианалитически. Слоение (M, F) , заданное (N, ξ) -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, называется (X, G) -слоением, если для каждого $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $i, j \in J$ существует элемент $g \in G$, удовлетворяющий равенству $\gamma_{ij} = g|_{f_j(U_i \cap U_j)}$. Если, кроме того, (X, ξ) – картаново многообразие и группа G – подгруппа группы автоморфизмов $Aut(X, \xi)$, то (M, F) – картаново (X, G) -слоение. Из работы [7, раздел VI] следует, что картановы (X, G) -слоения со связностью Эресмана накрыты расслоениями.

Картановы слоения с нулевой трансверсальной кривизной. Картаново слоение (M, F) типа (G, H) , трансверсальная картанова кривизна которого равна нулю, является $(G, G/H)$ -слоением и, если слоение (M, F) имеет связность Эресмана, оно накрыто расслоением. Следовательно, все полученные результаты справедливы для картановых слоений с нулевой трансверсальной кривизной, допускающих связность Эресмана.

Конформные слоения коразмерности q , $q \geq 3$. Согласно [12, теорема 5] любое конформное слоение коразмерности q , $q \geq 3$, не являющееся

римановым слоением и обладающее связностью Эресмана, накрыто расслоением и поэтому входит в класс исследуемых слоений.

Слоения с интегрируемой связностью Эресмана. Напомним, что связность Эресмана Q для слоения (M, F) называется интегрируемой, если интегрируемо распределение Q . Слоения с интегрируемой связностью Эресмана накрыты расслоениями и входят в исследуемый нами класс слоений.

Надстроечные слоения. Конструкция надстроечного слоения предложена А. Хефлигером и подробно описана в [15]. Заметим, что надстроечные слоения образуют класс слоений с интегрируемой связностью Эресмана и накрыты расслоениями.

Картаново слоение коразмерности $q=1$. Любое гладкое одномерное распределение интегрируемо, поэтому картаново слоение (M, F) коразмерности 1, допускающие связность Эресмана, накрыто расслоением.

5. Доказательство основных теорем

Регулярные накрывающие отображения

Определение 4. Пусть $f: M \rightarrow B$ – субмерсия. Говорят, что q , $\hat{h} \in \text{Diff}(M)$, лежит над $h \in \text{Diff}(B)$ относительно f , если $h \circ f = f \circ \hat{h}$.

Пусть $\tilde{k}: \tilde{K} \rightarrow K$ – универсальное накрывающее отображение, где K и $\tilde{K}$ – гладкие многообразия. По аналогии с теоремой 28.10 из [16] нетрудно показать, что для любого $h \in \text{Diff}(K)$ существует диффеоморфизм $\tilde{h} \in \text{Diff}(\tilde{K})$, лежащий над h . Для произвольного накрывающего отображения аналогичное утверждение, вообще говоря, не верно. Нетрудно доказать следующий критерий существования поднятий произвольных диффеоморфизмов относительно регулярных накрытий.

Предложение 1. Пусть $\hat{k}: \hat{K} \rightarrow K$ – гладкое регулярное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований Γ . Диффеоморфизм $\hat{h} \in \text{Diff}(\hat{K})$ лежит над некоторым диффеоморфизмом $h \in \text{Diff}(K)$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет равенству $\Gamma \circ \hat{h} = \hat{h} \circ \Gamma$.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что (M, F) – картаново слоение, моделируемое на эффективной картановой геометрии $\xi = (P(N, H), \omega)$, накрыто расслоением $\tilde{r}: \tilde{M} \rightarrow B$, и $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$ – универсальное накрытие. Расслоение $\tilde{r}: \tilde{M} \rightarrow B$ имеет связные слои и односвязное многообразие $\tilde{M}$. Применяя точную гомотопическую последовательность для этого расслоения, мы получаем, что его базовое многообразие B также односвязно.

Для произвольной точки $b \in B$ рассмотрим $y \in \tilde{r}^{-1}(b)$ и $x = \tilde{k}(y)$. Не нарушая общности, считаем, что существует окрестность U_i , $x \in U_i$, из (N, ξ) -коцикла $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}$, задающего слоение (M, F) , и окрестность $\tilde{U}_i$, $y \in \tilde{U}_i$, такая, что $\tilde{k}|_{\tilde{U}_i}: \tilde{U}_i \rightarrow U_i$ – диффеоморфизм.

Пусть $\tilde{V}_i := \tilde{r}(\tilde{U}_i)$. Тогда определен диффеоморфизм $\phi: \tilde{V}_i \rightarrow V_i$, удовлетворяющий равенству $\phi \circ \tilde{r}|_{\tilde{U}_i} = f_i \circ \tilde{k}|_{\tilde{U}_i}$. Подчеркнем, что диффеоморфизм ϕ индуцированной картановой геометрии $\eta_{\tilde{V}_i}$ на $\tilde{V}_i$ будет также изоморфизмом $(\tilde{V}_i, \eta_{\tilde{V}_i})$ и (V_i, ξ_{V_i}) в категории картановых геометрий $\mathcal{Cat}$. Прямая проверка показывает, что определенная на B геометрия η является картановой, причем $\eta|_{\tilde{V}_i} = \eta_{\tilde{V}_i}, i \in J$. Таким образом, утверждение (1) доказано.

Зафиксируем точки $x_0 \in M$ и $y_0 \in \tilde{k}^{-1}(x_0) \in \tilde{M}$. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M, x_0)$ действует на универсальном накрывающем пространстве $\tilde{M}$ как группа накрывающих преобразований $\tilde{G} \cong \pi_1(M, x_0)$ накрытия $\tilde{k}$. Так как $\tilde{G}$ сохраняет индуцированное слоение $(\tilde{M}, \tilde{F})$, образованное слоями расслоения $\tilde{r}: \tilde{M} \rightarrow B$, то каждое преобразование $\tilde{\psi} \in \tilde{G}$ определяет диффеоморфизм $\phi \in \text{Diff}(B)$ многообразия B , удовлетворяющий равенству $\tilde{r} \circ \tilde{\psi} = \phi \circ \tilde{r}$. Отображение $\chi: \tilde{G} \rightarrow \Psi: \tilde{\psi} \mapsto \phi$ – эпиморфизм групп и утверждение (2) доказано.

Заметим, что $\tilde{G}$ – подгруппа группы автоморфизмов $A(\tilde{M}, \tilde{F})$ слоения $(\tilde{M}, \tilde{F})$ в категории $\mathcal{CF}$. Следовательно Ψ – подгруппа группы автоморфизмов $\text{Aut}(B, \eta)$ в категории картановых геометрий $\mathcal{Cat}$. Ядро $\ker(\chi)$ отображения χ определяет фактор-многообразие $\hat{M} := \tilde{M} / \ker(\chi)$ с фактор-отображением $\hat{k}: \tilde{M} \rightarrow \hat{M}$ и фактор-группой $\hat{G} := \tilde{G} / \ker(\chi)$ такой, что $M \cong \hat{M} / \hat{G}$. Фактор-отображение $k: \hat{M} \rightarrow M$ – регулярное накрывающее отображение, причем $\hat{G}$ действует на $\hat{M}$ как группа накрывающих преобразований. Отображение $\theta: \hat{G} \rightarrow \Psi: \tilde{\psi} \cdot \ker(\chi) \mapsto \chi(\tilde{\psi}), \tilde{\psi} \in \tilde{G}$, – изоморфизм групп, (3) доказано. ■

Слоеное расслоение. Пусть (M, F) – картаново слоение, моделируемое на картановой геометрии $\xi = (P(N, H), \omega)$ типа (G, H) . Тогда определено главное H -расслоение с проекцией $\pi: \mathfrak{R} \rightarrow M$, H -инвариантное слоение $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ и $\mathfrak{g}$ -значная H -эквивариантная 1-форма β на $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (i) $\beta(A^*) = A$ для любого $A \in \mathfrak{h}$;
- (ii) отображение $\beta_u: T_u \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{g}, u \in \mathfrak{R}$, сюръективно, причем $\ker(\beta_u) = T_u \mathfrak{S}$;
- (iii) слоение $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ – трансверсально параллелизуемое;
- (iv) $L_X \beta = 0$ для каждого векторного поля X , касательного к слоению $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$.

Главное H -расслоение $\mathfrak{R}(M, H)$ называется *слоеным расслоением*, а слоение $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ *поднятым слоением* для картанова слоения (M, F) .

Если поднятое слоение $(\mathfrak{X}, \mathfrak{S})$ образовано слоями локально тривиального расслоения $\pi_b : \mathfrak{X} \rightarrow W$, то $W = \mathfrak{X} / \mathfrak{S}$ – гладкое многообразие, на котором индуцированы $\mathfrak{g}$ -значная 1-форма $\tilde{\beta}$, причем $\pi_b^* \tilde{\beta} := \beta$, и локально свободное действие группы Ли H на W . При этом $(W, \tilde{\beta})$ – параллелизуемое многообразие и $A(W, \tilde{\beta})$ – группа Ли его автоморфизмов, свободно действующая на W . Далее, через $A^H(W, \tilde{\beta})$ обозначается замкнутая подгруппа Ли группы Ли $A(W, \tilde{\beta})$, образованная преобразованиями, коммутирующими с индуцированным действием группы Ли H на W .

Доказательство теоремы 2. Предположим, что картаново слоение (M, F) накрыто расслоением. Тогда, слоение $(\tilde{M}, \tilde{F})$, индуцированное на пространстве универсального накрывающего отображения $\tilde{k} : \tilde{M} \rightarrow M$, определено слоями локально тривиального расслоения $\tilde{r} : \tilde{M} \rightarrow B$. Благодаря теореме 1 определены регулярное накрывающее отображение $k : \hat{M} \rightarrow M$ и локально тривиальное расслоение $r : \hat{M} \rightarrow B$, причем B – односвязное многообразие с индуцированной картановой геометрией η . Пусть Ψ – глобальная группа голономии слоения (M, F) , тогда Ψ изоморфна группе накрывающих преобразований G накрытия $k : \hat{M} \rightarrow M$. Так как многообразие $\tilde{M}$ односвязно, то существует универсальное накрывающее отображение $\hat{k} : \tilde{M} \rightarrow \hat{M}$, удовлетворяющее равенству $k \circ \hat{k} = \tilde{k}$. Пусть $\tilde{G}$, G и $\hat{G}$ – группы накрывающих преобразований для накрывающих отображений $\tilde{k}$, k и $\hat{k}$ соответственно, причем $\Psi \cong G \cong \tilde{G} / \hat{G}$.

Рассмотрим следующие прообразы H -расслоения $\mathfrak{X}$ относительно $\tilde{k}$ и k :

$$\tilde{\mathfrak{X}} := \{(\tilde{x}, u) \in \tilde{M} \times \mathfrak{X} \mid \tilde{k}(\tilde{x}) = \pi(u)\} = \tilde{k}^* \mathfrak{X} \text{ и}$$

$$\hat{\mathfrak{X}} := \{(\hat{x}, u) \in \hat{M} \times \mathfrak{X} \mid k(\hat{x}) = \pi(u)\} = k^* \mathfrak{X}.$$

Заметим, что

$$\tilde{\theta} := \tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X} : (\tilde{x}, u) \mapsto (\tilde{k}(\tilde{x}), u) \quad \forall (\tilde{x}, u) \in \tilde{\mathfrak{X}},$$

$$\theta := \hat{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X} : (\hat{x}, u) \mapsto (k(\hat{x}), u) \quad \forall (\hat{x}, u) \in \hat{\mathfrak{X}},$$

$$\hat{\theta} := \tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \hat{\mathfrak{X}} : (\tilde{x}, u) \mapsto (\hat{k}(\tilde{x}), u) \quad \forall (\tilde{x}, u) \in \tilde{\mathfrak{X}} -$$

регулярные накрывающие отображения с группами накрывающих преобразований $\tilde{G}$, G и $\hat{G}$ соответственно. Более того, $\tilde{\Gamma} \cong \tilde{G}$, $\Gamma \cong G$ и $\hat{\Gamma} \cong \hat{G}$.

Пусть $(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{S}})$ и $(\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{S}})$ соответствующие поднятые слоения. Так как $(\tilde{M}, \tilde{F})$ и $(\hat{M}, \hat{F})$ являются простыми слоениями, то $(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{S}})$ и $(\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{S}})$ также простые слоения, которые образованы локально тривиальными расслоениями $\tilde{\pi}_b : \tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \tilde{W}$ и $\hat{\pi}_b : \hat{\mathfrak{X}} \rightarrow \hat{W}$. Следовательно, $g_0(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{S}}) = 0$, $g_0(\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{S}}) = 0$ и $\tilde{W} = \tilde{\mathfrak{X}} / \tilde{\mathfrak{S}}$, $\hat{W} = \hat{\mathfrak{X}} / \hat{\mathfrak{S}}$ – гладкие многообразия. Так как расслоения $\tilde{r} : \tilde{M} \rightarrow B$

и $r: \hat{M} \rightarrow B$ имеют одинаковую базу B , то каждый слой слоения $(\tilde{M}, \tilde{F})$ инвариантен относительно действия группы $\hat{G}$, т.е. $\hat{G} \subset A_L(\tilde{M}, \tilde{F})$. Поэтому $\hat{G} \subset A_L(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{Z}})$ и пространства слоев $\tilde{\mathfrak{X}}/\tilde{\mathfrak{Z}} = \tilde{W}$ и $\tilde{\mathfrak{X}}/\hat{\mathfrak{Z}} = \hat{W}$ совпадают, т.е. $\tilde{W} = \hat{W}$. Следовательно, группы базовых автоморфизмов $A_B(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{Z}})$ и $A_B(\tilde{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{Z}})$ могут быть отождествлены, т.е. $A_B(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{Z}}) = A_B(\tilde{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{Z}})$.

Согласно условиям доказываемой теоремы Ψ – дискретная подгруппа группы Ли $Aut(B, \eta)$. Пусть $N(\Psi)$ – нормализатор Ψ в группе Ли $Aut(B, \eta)$. Тогда $N(\Psi)$ – замкнутая подгруппа Ли группы Ли $Aut(B, \eta)$, фактор-группа $N(\Psi)/\Psi$ также является группой Ли.

Пусть $\pi: \mathfrak{X} \rightarrow M$ – проекция слоеного расслоения над (M, F) . Благодаря дискретности глобальной группы голономии Ψ в группе Ли $Aut(B, \eta)$ поднятое слоение $(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{Z}})$ образовано слоями некоторого локально тривиального расслоения $\pi_b: \mathfrak{X} \rightarrow W$, которое называется базовым. Подчеркнем, что существует отображение $\tau: \hat{W} \rightarrow W$, удовлетворяющее равенству $\tau \circ \hat{\pi}_b = \pi_b$. Непосредственная проверка показывает, что $\tau: \hat{W} \rightarrow W$ – регулярное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований Φ , $\Phi \subset A^H(\hat{W}, \hat{\beta})$, причем Φ естественным образом изоморфна группам Ψ , G и Γ .

Обозначим через $\eta = (P(B, H), \omega)$ картанову геометрию с проекцией $p: P \rightarrow B$ на B , определенную в доказательстве теоремы 1. Заметим, что $\hat{W} = P$ – пространство главного H -расслоения для картановой геометрии η . Так как $k: \hat{M} \rightarrow M$, $\theta: \tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$ и $\pi: \mathfrak{X} \rightarrow M$ – морфизмы следующих слоений $k: (\hat{M}, \hat{F}) \rightarrow (M, F)$, $\theta: (\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{Z}}) \rightarrow (\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ и $\pi: (\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) \rightarrow (M, \mathfrak{Z})$ в категории слоений $\mathfrak{S}^{ol}$, то определены отображения $\hat{\tau}: B \rightarrow M/F$ и $s: W \rightarrow W/H \cong M/F$, причем коммутативна диаграмма (рис. 2).

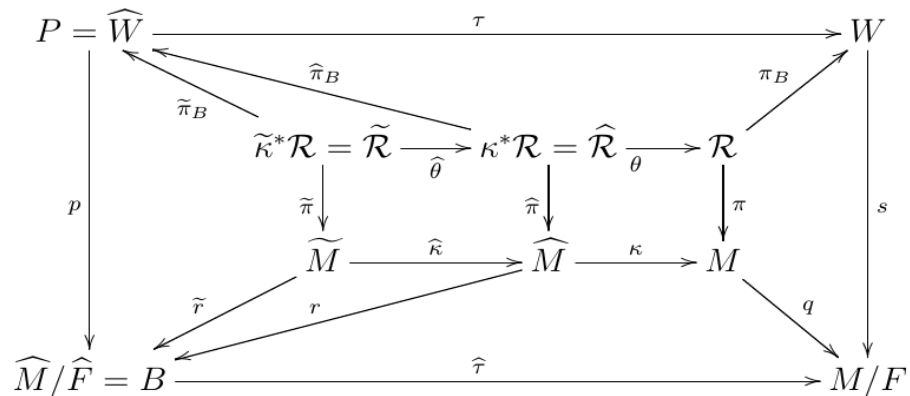


Рис. 2

Как доказано в [13, теорема 1], существуют изоморфизмы групп Ли:

$$\varepsilon: A_B(M, F) \rightarrow im(\varepsilon) \subset A^H(W, \tilde{\beta}) \text{ и}$$

$$\hat{\varepsilon}: A_B(\tilde{M}, \tilde{F}) \cong A_B(\hat{M}, \hat{F}) \rightarrow im(\hat{\varepsilon}) \subset A^H(\hat{W}, \hat{\beta}).$$

Определим отображение $\Theta: im(\varepsilon) \rightarrow N(\Phi)/\Phi$ следующим образом. Возьмем произвольный элемент $h \in im(\varepsilon) \subset A^H(W, \tilde{\beta})$. Обозначим элемент $h \in im(\varepsilon) \subset A^H(W, \tilde{\beta})$ через $f \cdot A_L(M, F) \in A_B(M, F)$, где $f \in A(M, F)$. Так как $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$ – универсальное накрывающее отображение, то существует диффеоморфизм $\tilde{f} \in Diff(\tilde{M})$, лежащий над f относительно. Заметим, что $\tilde{f} \in A(\tilde{M}, \tilde{F})$, тогда $\tilde{f} \cdot A_L(\tilde{M}, \tilde{F}) \in A_B(\tilde{M}, \tilde{F})$. Рассмотрим $\hat{h} := \hat{\varepsilon}(\tilde{f} \cdot A_L(\tilde{M}, \tilde{F})) \in im(\hat{\varepsilon}) \subset A^H(\hat{W}, \hat{\beta})$. Прямая проверка показывает, что $\hat{h}$ лежит над h относительно τ . Напомним, что Φ – группа накрывающих преобразований накрытия $\tau: \hat{W} \rightarrow W$. Применяя предложение 1, мы получаем, что $\hat{h} \in N(\Phi)$ и множество всех автоморфизмов $im(\hat{\varepsilon})$, лежащих над h , равно множеству всех преобразований из класса $\hat{h} \cdot \Phi$. Положим $\Theta(h) := \hat{h} \cdot \Phi \in N(\Phi)/\Phi$. Проверка показывает, что отображение $\Theta: im(\varepsilon) \rightarrow N(\Phi)/\Phi$ – мономорфизм групп.

Эффективность картановой геометрии $\eta = (P(B, H), \omega)$ на B , где $P = \hat{W}$, влечет существование изоморфизма групп Ли $\sigma: A^H(\hat{W}, \hat{\beta}) \rightarrow Aut(B, \eta)$. Заметим, что $\sigma(\Phi) = \Psi$ и $\sigma(N(\Phi)) = N(\Psi)$, следовательно, существует индуцированный изоморфизм групп Ли $\tilde{\sigma}: N(\Phi)/\Phi \rightarrow N(\Psi)/\Psi$. Тогда композиция мономорфизмов групп Ли

$$\delta := \tilde{\sigma} \circ \Theta \circ \varepsilon: A_B(M, F) \rightarrow N(\Psi)/\Psi$$

является требуемым мономорфизмом групп Ли. Благодаря единственности структуры группы Ли в группе базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ и [13, теорема 1] образ $im(\delta)$ является открыто-замкнутой подгруппой фактор-группы $N(\Psi)/\Psi$. ■

Доказательство теоремы 3.

1. Согласно условиям доказываемой теоремы 3 (M, F) является Q -полным картановым слоением, причем распределение Q интегрируемо. В этом случае существует q -мерное слоение (M, F^t) такое, что $TF^t = Q$. Пусть $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$ – универсальное накрывающее отображение. Из [15, предложение 2] известно, что в этом случае Q является интегрируемой связностью Эресмана для слоения (M, F) .

Согласно теореме о разложении Касивабары [17] универсальное накрывающее многообразие равно произведению многообразий $\tilde{M} = \tilde{Q} \times B$, где $\tilde{Q}$ – универсальное накрывающее многообразие для любого слоя слоения (M, F) , а B – универсальное накрывающее многообразие для любого слоя слоения (M, F^t) . Определены индуцированные слоения $\tilde{F} := \tilde{k}^* F =$

$= \{\tilde{Q} \times \{y\} \mid y \in B\}$, $\tilde{F}^t := \tilde{k}^* F^t = \{\{z\} \times B \mid z \in \tilde{Q}\}$, следовательно, (M, F) накрыто расслоением $\tilde{s}: \tilde{Q} \times B \rightarrow \tilde{Q}$. Так же как и в доказательстве теоремы 1, на многообразии B индуцируется картанова геометрия η такая, что (M, F) становится $(Aut(B, \eta), B)$ -слоением.

2. Пусть Ψ – глобальная группа голономии этого слоения. Предположим, что нормализатор $N(\Psi)$ равен централизатору $Z(\Psi)$ группы Ψ в группе $(Aut(B, \eta), B)$. Так как слоение (M, F^t) накрыто расслоением $\tilde{s}: \tilde{Q} \times B \rightarrow \tilde{Q}$, то для него определена глобальная группа голономии Ψ^t .

Зафиксируем точки $x_0 \in M$ и $(z_0, y_0) \in \tilde{k}^{-1}(x_0) \in \tilde{M}$. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M, x)$ действует на универсальном накрывающем пространстве $\tilde{M} = \tilde{Q} \times B$ как группа накрывающих преобразований $\tilde{G} \cong \pi_1(M, x)$ накрытия $\tilde{k}$. Так как $\tilde{G}$ сохраняет оба индуцированных слоения $(\tilde{M}, \tilde{F})$ и $(\tilde{M}, \tilde{F}^t)$, то каждый элемент $\tilde{g} \in \tilde{G}$ может быть записан в виде $\tilde{g} = (\psi^t, \psi)$, где ψ^t – преобразование из подгруппы Ψ^t в $Diff(\tilde{Q})$, $\psi \in \Psi$, причем $\tilde{g}(z, y) = (\psi^t(z), \psi(y))$, $(z, y) \in \tilde{Q} \times B$. Отображения $\tilde{\chi}: \tilde{G} \rightarrow \Psi: \tilde{g} = (\psi^t, \psi) \mapsto \psi$ и $\tilde{\chi}^t: \tilde{G} \rightarrow \Psi^t: \tilde{g} = (\psi^t, \psi) \mapsto \psi^t$ являются эпиморфизмами указанных групп. Пусть h – любой элемент из класса смежности $h \circ \Psi \in N(\Psi)$. Так как $N(\Psi) = Z(\Psi)$, то мы получаем следующую цепочку равенств

$$\tilde{g} \circ (id_{\tilde{Q}}, h) = (\psi^t, \psi) \circ (id_{\tilde{Q}}, h) = (\psi^t \circ id_{\tilde{Q}}, \psi \circ h) =$$

$$(id_{\tilde{Q}} \circ \psi^t, h \circ \psi) = (id_{\tilde{Q}}, h) \circ (\psi^t, \psi) = (id_{\tilde{Q}}, h) \circ \tilde{g}$$

для любого $\tilde{g} = (\psi^t, \psi) \in \tilde{G}$, т.е. $\tilde{G} \circ (id_{\tilde{Q}}, h) = (id_{\tilde{Q}}, h) \circ \tilde{G}$. Следовательно, согласно предложению 1 диффеоморфизм $\tilde{h}$ проектируется на M , т.е. существует такое преобразование $\tilde{h} \in Diff(\tilde{M})$, что $(id_{\tilde{Q}}, h)$ лежит над $\tilde{h}$ относительно универсального накрытия $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$. Используя принадлежность $(id_{\tilde{Q}}, h) \in A(\tilde{M}, \tilde{F})$, нетрудно проверить, что $\tilde{h} \in A(M, F)$. Следовательно, отображение $\varepsilon: A_B(M, F) \rightarrow N(\Psi)/\Psi$, заданное равенством $\varepsilon(\tilde{h} \cdot A_L(M, F)) = h$, является сюръективно. Таким образом, ε – изоморфизм групп Ли. ■

6. Пример вычисления группы базовых автоморфизмов

Пусть S^q – q -мерная стандартная сфера, где $q \geq 3$. отождествим S^q с $R^q \cup \{\infty\}$, где $\{\infty\}$ – бесконечно удаленная точка. Определим преобразование $\psi: S^q \rightarrow S^q$ равенством $\psi(z) = \lambda z$ для любого $z \in S^q \cong R^q \cup \{\infty\}$, где λ –

действительное число, причем $0 < \lambda < 1$. Обозначим через $Conf(S^q)$ группу Ли всех конформных преобразований сферы S^q . Пусть $\Psi = \langle \psi \rangle$, подгруппа группы $Conf(S^q)$, порожденная преобразованием ψ , и изоморфная Z . Определим действие группы целых чисел Z на произведении $R^1 \times S^q$ равенством $n(t, z) = (t - n, \psi^n(z))$ для любых $n \in Z$, $(t, z) \in R^1 \times S^q$. Это действие свободное и собственно разрывное, поэтому определено многообразие орбит $M = R^1 \times_Z S^q$ и фактор-отображение $f: R^1 \times S^q \rightarrow M$. Так как указанное действие сохраняет структуру произведения $R^1 \times S^q$, то определены два слоения (M, F) и (M, F^t) , накрытые тривиальными расслоениями $pr_2: R^1 \times S^q \rightarrow S^q$ и $pr_1: R^1 \times S^q \rightarrow R^1$ соответственно. Обозначим через $\chi: R^1 \rightarrow S^1$ и $\nu: S^q \rightarrow S^q / \Psi$ проекции на пространство орбит, а через $r: M \rightarrow M / F$ – проекцию на пространство слоев слоения (M, F) . Наблюдения показывают, что топологические пространства M / F и S^q / Ψ гомеоморфны и удовлетворяют коммутативной диаграмме (рис. 3), где $p: M \rightarrow S^1$ – проекция локально тривиального расслоения, образованного слоями (M, F^t) . Так как многообразие M является пространством локально тривиального расслоения над окружностью S^1 с компактным стандартным слоем S^q , то M – компактно.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^1 & \xleftarrow{pr_1} & \mathbb{R}^1 \times S^q & \xrightarrow{pr_2} & S^q \\
 \chi \downarrow & & f \downarrow & & \nu \downarrow \\
 S^1 & \xleftarrow{p} & M & \xrightarrow{r} & S^q / \Psi \cong M / F
 \end{array}$$

Рис. 3

Распределение Q , касательное к слоям слоения (M, F^t) , является интегрируемой связностью Эресмана для слоения (M, F) . Слоение (M, F) имеет два компактных слоя L_1 и L_2 , диффеоморфные окружности, любой другой слой L диффеоморфен прямой, а его замыкание равно объединению $L \cup L_1 \cup L_2$. Подчеркнем, что (M, F) – конформное слоение, которое можно рассматривать как картаново типа (G, H) , где $G = Conf(S^q)$, а H – стационарная подгруппа группы $Conf(S^q)$ в некоторой точке из S^q . Как известно, $H \cong CO(q) \ltimes R^q$ – полупрямое произведение конформной группы $CO(q) = R^+ \times O(q)$ и нормальной абелевой подгруппы R^q . Заметим, что Ψ – глобальная группа голономии слоения (M, F) , причем Ψ – дискретная подгруппа группы Ли $Conf(S^q)$.

Нетрудно проверить, что нормализатор группы Ψ равен $N(\Psi) = R^+ \times O(q)$ и совпадает с централизатором $Z(\Psi)$. Применяя теорему 3, мы получаем, что группа базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ является группой Ли, изоморфной фактор-группе $N(\Psi)/\Psi \cong U(1) \times O(q)$, где $U(1) \cong S^1$. Таким образом, группа Ли базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ изоморфна произведению групп Ли $U(1) \times O(q)$.

Список литературы

1. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М. : Наука, 1995. – 384 с.
2. Склярченко Е. Г. К пятой проблеме Гильберта // Проблемы Гильберта / под ред. П. С. Александрова. М. : Наука, 1969. С. 101–115.
3. Chu H., Kobayashi S. The automorphism group of a geometric structure // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. № 113. P. 141–150.
4. Cap A., Slovak J. Parabolic Geometries. I. Background and General Theory // Mathematical Surveys and Monographs, 154. American Mathematical Society. Providence, RI, 2009.
5. Sharpe R. W. Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program. Graduate Texts in Mathematics. New York ; Springer-Verlag, 1997.
6. Crampin M., Saunders D. Cartan Geometries and their Symmetries, A Lie Algebroid Approach // ATLANTIS Press Atlantis Studies in Variational Geometry. 2016. Vol. 4.
7. Bazaikin Y. V., Galaev A. S., Zhukova N. Chaos in Cartan foliations // Chaos. 2020. Vol. 30. P. 1–9.
8. Pecastaing V. On two theorems about local automorphisms of geometric structures // Ann. Int. Fourier, Grenoble. 2016. № 66 (1). P. 175–208.
9. Cap A., Caperl A., Gover A. R. and Hamm M. Holonomy reductions of Cartan geometries and curved orbit decompositions // Duke Math. J. 2014. Vol. 163. P. 1035–1070.
10. Jennen H. Cartan geometry of spacetimes with a nonconstant cosmological function A // arXiv:1406.2621v2[gr-qc]. Physics. REV. D 90, 084046. 2014.
11. Белько И. В. Аффинные преобразования трансверсальной проектируемой связности на многообразии со слоением // Математический сборник. 1982. Т. 117, № 2. С. 181–195.
12. Zhukova N. I. Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Math. Information Sci. Phys. 2009. № 2. P. 14–35.
13. Sheina K. I., Zhukova N. I. The Groups of Basic Automorphisms of Complete Cartan Foliations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, № 2. P. 271–280.
14. Blumenthal R. A., Hebda J. J. Ehresmann connections for foliations // Indiana Univ. Math. J. 1984. Vol. 33, № 4. P. 597–611.
15. Жукова Н. И. Минимальные множества картановых слоений // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2007. Т. 256. С. 105–135.
16. Busemann H. The geometry of geodesics. N. Y. : Academic Press, 2011.
17. Kashiwabara S. The decomposition of differential manifolds and its applications // Tohoku Math. J. 1959. № 11. P. 43–53.

References

1. Kobayasi Sh. *Gruppy preobrazovaniy v differentsial'noy geometrii = Transformation groups in differential geometry*. Moscow: Nauka, 1995:384. (In Russ.)
2. Sklyarenko E.G. To Hilbert's fifth problem. *Problemy Gil'berta = Hilbert's problems*. Moscow: Nauka, 1969:101–115. (In Russ.)

3. Chu H., Kobayashi S. The automorphism group of a geometric structure. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1964;113:141–150.
4. Cap A., Slovak J. Parabolic Geometries. I. Background and General Theory. *Mathematical Surveys and Monographs, 154. American Mathematical Society.* Providence, RI, 2009.
5. Sharpe R.W. *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program. Graduate Texts in Mathematics.* New York; Springer-Verlag, 1997.
6. Crampin M., Saunders D. Cartan Geometries and their Symmetries, A Lie Algebroid Approach. *ATLANTIS Press Atlantis Studies in Variational Geometry.* 2016;4.
7. Bazaikin Y.V., Galaev A.S., Zhukova N. Chaos in Cartan foliations. *Chaos.* 2020;30: 1–9.
8. Pecastaing V. On two theorems about local automorphisms of geometric structures. *Ann. Int. Fourier, Grenoble.* 2016;66(1):175–208.
9. Cap A., Capel A., Gover A.R. and Hamm M. Holonomy reductions of Cartan geometries and curved orbit decompositions. *Duke Math. J.* 2014;163:1035–1070.
10. Jennen H. Cartan geometry of spacetimes with a nonconstant cosmological function A. arXiv:1406.2621v2[gr-qc]. *Physics. REV. D* 90, 084046. 2014.
11. Bel'ko I.V. Affine transformations of a transverse projected connection on a foliated manifold. *Matematicheskiy sbornik = Collected articles of mathematics.* 1982;117(2):181–195. (In Russ.)
12. Zhukova N.I. Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms. *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Math. Information Sci. Phys.* 2009;2:14–35.
13. Sheina K.I., Zhukova N.I. The Groups of Basic Automorphisms of Complete Cartan Foliations. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2018;39(2):271–280.
14. Blumenthal R.A., Hebda J.J. Ehresmann connections for foliations. *Indiana Univ. Math. J.* 1984;33(4):597–611.
15. Zhukova N.I. Minimal puffed Cartan sets. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova = Proceedings of Steklov Mathematical Institute.* 2007;256:105–135. (In Russ.)
16. Busemann H. *The geometry of geodesics.* New York: Academic Press, 2011.
17. Kashiwabara S. The decomposition of differential manifolds and its applications. *Tohoku Math. J.* 1959;11:43–53.

Информация об авторах / Information about the authors

Ксения Игоревна Шеина

аспирант, Национальный
исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
(Россия, г. Нижний Новгород,
ул. Большая Печерская, 25/12)

E-mail: ksheina@hse.ru

Kseniya I. Sheina

Postgraduate student, National Research
University “Higher School of Economics”
(25/12 Bolshaya Pecherskaya street,
Nizhny Novgorod, Russia)

Поступила в редакцию / Received 02.12.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 18.12.2020

Принята к публикации / Accepted 29.12.2020